***1. Краткие теоретические сведения***

Процесс нахождения приближенных корней уравнения разбивается на два этапа:

1. отделение корней;
2. уточнение корней по заданной степени точности.

Отделить корни – это значит разбить всю область допустимых значений на отрезки, в каждом из которых содержится один корень. Отделение корней проводится графически. Для этого все члены заданного уравнения

 **(1.1)**

разбивают на две группы, одну из них записывают в левой части уравнения, а другую в правой. Таким образом, уравнение (1) представляют в виде



После этого на одном чертеже строят графики двух функций  и . Абсциссы точек пересечения графиков этих двух функций и служат корнями данного уравнения. Если искомый корень , то его можно уточнить с точностью до различными методами. Например, методом половинного деления, методом хорд, методом касательных и др.

Пусть уравнение (1.1) имеет на отрезке единственный корень и функция непрерывна на отрезке . Разделим отрезок  пополам точкой  Если (что наиболее верно), то возможны два случая: 1) и имеют разные знаки, а и одинаковые знаки; 2) и имеют одинаковые знаки, а и разные знаки. Выбираем тот из двух отрезков или , на концах которого значения функции имеют разные знаки. Полученный отрезок принимает за новый отрезок , делим его пополам точкой  и далее поступаем также, как было указано выше. В результате процесса половинного деления получаем последовательность точек  Критерием окончания метода половинного деления является выполнение условия

 **(1.2)**

(- заданная точность), тогда искомый корень .

Для уточнения корня  уравнения (1) методом хорд функция  на отрезке должна быть непрерывной и иметь производные первого и второго порядков. В методе хорд существуют два случая:

I. Первая и вторая производные функции  имеют одинаковые знаки на рассматриваемом отрезке , содержащем искомый корень, т.е. и или и . В этом случае искомый корень уравнения (1) вычисляется по формуле

 **(1.3)**

где - начало рассматриваемого отрезка.

II. Первая и вторая производные функции  имеют разные знаки на рассматриваемом отрезке, содержащем искомый корень, т.е. и или  и . В этом случае искомый корень уравнения (1) вычисляется по формуле

 **(1.4)**

где - конец рассматриваемого отрезка.

Критерием окончания указанного процесса является выполнение условия (2). Тогда искомый корень .

Для уточнения корня  уравнения (1.1) методом касательных функция  на отрезке должна иметь непрерывные производные первого и второго порядков, сохраняющие на указанном отрезке постоянные знаки. В методе касательных, также как и в методе хорд существуют два случая:

I. Первая и вторая производные функции  имеют одинаковые знаки на рассматриваемом отрезке , содержащем искомый корень, т.е. и или и . В этом случае искомый корень уравнения (1) вычисляется по формуле

 **(1.5)**

где - конец рассматриваемого отрезка.

II. Первая и вторая производные функции  имеют разные знаки на рассматриваемом отрезке, содержащем искомый корень, т.е. и или  и . В этом случае искомый корень уравнения (1.1) вычисляется также по формуле (1.5), только - начало рассматриваемого отрезка. Критерием окончания указанного процесса является выполнение условия (1.2). Тогда искомый корень .

2. ***Краткие теоретические сведения***

*Системой линейных уравнений* относительно неизвестныхназывается конечная совокупность уравнений вида

 **(2.1)**

где – коэффициенты при неизвестных,  свободные члены.

*Решением* системы уравнений (2.1) называется упорядоченный набор чисел,  удовлетворяющий всем уравнениям данной системы, т.е. обращающий их в верные равенства.

Система линейных уравнений называется *совместной,* если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений. Совместная система называется *определенной,* если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если более одного решения. Неопределенная система линейных уравнений всегда имеет бесконечное множество решений.

Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если каждое решение первой системы является решением второй, и обратно.

К э*лементарным преобразованиям* системы относятся:

1. перестановка двух уравнений системы;
2. умножение обеих частей одного из уравнений на любое число отличное от нуля;
3. прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженного на некоторое число.

Элементарные преобразования переводят данную систему уравнений в эквивалентную систему.

Любую систему линейных уравнений при помощи конечного числа элементарных преобразований можно привести к ступенчатому, в частности к треугольному, виду. Особенность такой системы заключается в том, что в левой части каждого последующего уравнения число членов уменьшается на один. Например,

 или 

Этот прием называется прямым ходом метода Гаусса. А нахождение переменных, начиная с последнего уравнения системы и заканчивая первым, называется обратным ходом метода Гаусса.

Практически удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Методы решения систем линейных уравнений делятся на две группы – прямые и итерационные. Прямые методы используют конечные соотношения (формулы) для вычисления неизвестных. Они дают решение после выполнения заранее известного числа операций. Эти методы сравнительно просты и универсальны, т.е. пригодны для решения широкого класса линейных систем. Существенным недостатком прямых методов является накапливание погрешностей в процессе решения, поскольку вычисления на любом этапе используют результаты предыдущих операций.

Прямые методы решения линейных систем иногда называют точными, поскольку решение выражается в виде точных формул через коэффициенты системы. К прямым методом относятся правило Крамера (решение систем при помощи определителей), метод Гаусса (приведение матрицы системы к треугольному или ступенчатому виду) и др.

Итерационные методы – это методы последовательных приближений. В них необходимо задать некоторое приближенное решение – начальное приближение. После этого с помощью некоторого алгоритма проводится один цикл вычислений, называемый итерацией. В результате итерации находят новое приближение. Итерации проводятся до получения решения с требуемой точностью.

Одним из самых распространенных итерационных методов, отличающийся простотой и легкостью программирования, является метод Гаусса-Зейделя. Для решения системы линейных алгебраических уравнений вида

 **(2.2)**

итерационным методом Гаусса-Зейделя диагональные элементы должны быть отличны от нуля (в противном случае можно переставить уравнения системы). Далее необходимо выразить неизвестные  соответственно из 1-го, 2-го, 3-го уравнений системы (2.2):

 **(2.3)**

 **(2.4)**

 **(2.5)**

Для дальнейшего решения задаются некоторые начальные (нулевые) приближения неизвестных:  Подставляя эти значения в правую часть выражения (2.3), получаем новое (первое) приближение для :



Используя это значение для  и приближение  для , находим из (2.4) первое приближение для :



И наконец, используя вычисленные значения , находим с помощью выражения (2.5) первое приближение для :



На этом заканчивается первая итерация системы (2.3)-(2.5). Используя, теперь, значения проводится вторая итерация, в результате которой будут найдены вторые приближения к решению: и т.д. Приближение с номером  можно представить в виде:



После каждой - той итерации вычисляются значения свободных членов системы (2.2):



и значения невязок  Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения всех невязок, взятые по модулю, не станут меньше либо равны заданной точности. Т.е.



Если хотя бы одна из невязок k-той итерации, взятая по модулю, больше заданной точности то итерационный процесс необходимо продолжить.

Для сходимости итерационного процесса достаточно, чтобы модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы были не меньше сумм модулей всех остальных коэффициентов:

 **(2.6)**

Эти условия являются достаточными для сходимости метода, но они не являются необходимыми, т.е. для некоторых систем итерации сходятся и при нарушении условий (2.6).

3. ***Краткие теоретические сведения***

Интерполирование представляет собой одну из задач приближения (аппроксимации) функций. Если величина является функцией аргумента , то это означает, что любому значению из области определения функции поставлено в соответствие значение . Однако на практике часто неизвестна явная связь между и , т.е. невозможно записать эту связь в виде некоторой зависимости . В некоторых случаях даже при известной зависимости  она настолько громоздка, что ее применение в практических расчетах затруднительно.

Наиболее распространенным и практически важным случаем, когда вид связи между и  неизвестен, является задание этой связи в виде некоторой таблицы . Эти значения либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные. На практике могут понадобиться значения величины и в других точках, отличных от точек . Этой цели и служит задача о приближении (аппроксимации) функций: данную функцию  требуется приближенно заменить (аппроксимировать) некоторой функцией так, чтобы отклонение (в некотором смысле) от в заданной области было наименьшим. Функция при этом называется аппроксимирующей.

Для практики весьма важен случай аппроксимации функции многочленом

  **(3.1)**

Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек , то аппроксимация называется точечной. К ней относится интерполирование. При построении приближения на непрерывном множестве точек (например, на отрезке) аппроксимация называется *непрерывной (или интегральной).*

Интерполирование является одним из основных типов точечной аппроксимации. Задачу интерполирования можно сформулировать так: для данной функции требуется построить многочлен (3.1), принимающий в заданных точках  те же значения , что и функция , т.е.

 **(3.2)**

При этом предполагается, что среди точек нет одинаковых. Эти точки называются *узлами* интерполяции, а многочлен  - интерполяционным многочленом.

Интерполяционные формулы (функции, в частности многочлены) используют, прежде всего, для вычисления приближенных значений табличной функции в промежуточных точках между узлами интерполяции, а также и для решения многих других задач.

В теории интерполяции доказано, что для табличной функ­ции , где , т.е. функции заданной в  узле , среди которых нет совпадающих, можно построить единственный интерполяционный многочлен степени  (степень  на единицу меньше общего числа узлов).

Существуют различные виды записи и построения единствен­ного интерполяционного многочлена степени  для табличной функ­ции , заданной в узле .

Один из них известен как *многочлен (формула) Лагранжа:*

 **(3.3)**

Этот многочлен обращается в нуль во всех узлах интерполяции, за исключением одного - го, где он должен равняться единице.

Другой вид записи интерполяционного многочлена -ой степе­ни использует понятия конечных разностей. Кроме того, в данном случае предполагается, что все узлы равноотстоящие, т. е.  Число  называется *шагом интерполяции*.

Рассмотрим следующие разности значений функции 



Эти величины называются разностями *первого порядка*. При помощи разностей первого порядка можно составить разности вто­рого порядка



При помощи разностей второго порядка можно составить разности третьего порядка

,

и т.д., можно составить разности любого порядка.

Используя конечные разности и предполагая, что узлы - рав­ноотстоящие, можно представить другой вид интерполяционного многочлена, носящего название интерполяционного многочлена (формулы) Ньюто­на:



Эту формулу можно записать в более удобном для практичес­кого использования виде:

 **(3.4)**

где .

С целью повышения точности расчетов и уменьшения числа членов в формуле (4), ограничиваются случаем , т. е. используют формулу (3.4) при . Для других значений аргумента, например, , вместо значения  принимается . Таким образом, интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в виде

 **(3.5)**

где . Выражение (3.5) называется *первым интерполяционным многочленом Ньютона для интерполи­рования вперед.* Эту формулу обычно используют для вычисления значений функции в точках левой половины рассматриваемого отрезка. Для правой половины рассматриваемого отрезка разности лучше вычислять справа на лево. В этом случае , т.е. и интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в виде

 **(3.6)**

Эта формула называется *вторым интерполяционным многочленом Ньютона для интерполирования назад.*

4. ***Краткие теоретические сведения***

Анализ экономических и технических процессов приводит к необходимости выявления существенных факторов, влияющих на исследуемый процесс, а также к выбору формы связи между факторами и к оценке параметров полученных уравнений связи.

Если уравнение связи между двумя варьируемыми величинами  и представляет собой сложную функциональную зависимость , то ее можно на заданном отрезкеприближенно заменить более простыми математическими зависимостями такими, например, как прямолинейная или параболическая. Для построения таких зависимостей существует ряд методов. Рассмотрим наиболее распространенный метод – метод наименьших квадратов.

Для заданной функции на отрезке  и значе­ния  вычисляют приближенные значения функции  , округляя их до пяти знаков после запятой, где *;; ,*.

Записывают уравнения прямой и параболы . Для нахождения уравнения прямой  по методу наименьших квад­ратов необходимо решить систему линейных уравнений второго по­рядка с двумя неизвестными  и :



Для нахождения уравнения параболы по методу наименьших квадратов необходимо решить систему линейных уравнений третьего по­рядка с тремя неизвестными ****:



Чтобы решить представленные две системы уравнения необходимо выполнить расчеты, представляющие собой следующую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0  1  2  .  .  . |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Последняя строка таблицы представляет собой суммы элементов соответствующего столбца. После этого, системы решаются любым известным методом, например, методом Крамера (при помощи определителей) или методом Гаусса (в матрицах). Найденные коэффициенты вставляют в соответствующие уравнения прямой  и параболы .

Чтобы выбрать из двух найденных зависимостей (прямолинейной и параболической) - наилучшую, вычисляют погрешности полученных зависимостей:

а) критерий метода наименьших квадратов



(Для прямой , а для параболы );

б) абсолютную среднеквадратическую ошибку



в) относительную среднеквадратическую ошибку



Данные для расчета погрешностей оформляют в виде следующей таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | |  | |
|  |  |  |  |
| 0  1  2 |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Далее, сравнивают полученные результаты, и указывают - какая из полученных приближенных зависимостей лучше и почему.

Графики заданной функции, прямой и параболы изображены на рис 7. На рисунке видно, что парабола лучше «отслеживает» точки исходной таблич­ной функции по сравнению с прямой. Так, в данном случае лучшей для приближения заданной функции является параболическая зави­симость (из двух предложенных по заданию видов зависимостей), что подтверждается величинами погрешностей аппроксимации - пог­решности для параболы меньше погрешностей для прямой.

5. ***Краткие теоретические сведения***

Уравнение, в котором неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала, называется *дифференциальным уравнением*.

Если неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит только от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

*Порядком* дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной (или дифференциала), входящей в уравнение.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, может быть записано в виде . Методы точного решения (интегрирования) дифференциальных уравнений пригодны лишь для сравнительно небольшой части уравнений, встречающихся на практике. Поэтому большое значение имеют методы приближенного решения дифференциальных уравнений, которые в зависимости от формы представления решения можно разделить на две группы:

1. аналитические методы, дающие приближенное решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения;
2. численные методы, дающие приближенное решение в виде таблицы.

Решить дифференциальное уравнение  численным методом – это значит для заданной последовательности аргументов  и числа, не определяя функцию , найти такие значения , что  и . Таким образом, численные методы позволяют вместо нахождения функции  получить таблицу значений этой функции для заданной последовательности аргументов с шагом .

Согласно методу Эйлера с пересчетом каждое приближенное значение  решения дифференциального уравнения находится в два этапа: сначала вычисляется промежуточное значение



Затем искомое приближение



Результаты и значения промежуточных вычислений представляются в виде таблицы:

6. ***Краткие теоретические сведения***

Из курса математического анализа известно, что если функция непрерывна на отрезке , то определенный интеграл от этой функции в пределах от  до существует и имеет вид



где - первообразная для функции .

Для большинства элементарных функций первообразную  не удается выразить через элементарные функции. Кроме того, при практических расчетах подынтегральная функция задается в виде таблицы или сама по себе достаточно сложная. Все это приводит к необходимости замены интегрирования численными методами.

Задача численного интегрирования состоит в следующем: найти определенный интеграл на отрезке , если подинтегральная функция на отрезке задана таблично.

Формулы приближенного интегрирования называются квадратурными. Рассмотрим простейшие из них.

*Метод прямоугольников (формула прямоугольников):*



где , 

Например, для 



*Метод трапеций (формула трапеций):*



Например, для 



*Метод Симпсона (формула Симпсона):*



где -четное число.

Например, для 

